

PS Algorithmen und Datenstrukturen 2024

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 25

Warum dürfen die Kantengewichte nicht negativ sein, damit Dijkstras Algorithmus ein korrektes Ergebnis liefert?

Geben Sie einen Beispielgraph mit negativen Kantengewichten, aber ohne negativen Zyklus, an für den Dijkstras Algorithmus nicht korrekt funktioniert.

Aufgabe 26

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, gewichteter Graph mit Kantengewicht $w(u, v) \in \mathbb{R}$ für jede Kante $(u, v) \in E$. Sei ferner f eine Funktion, die jedem Knoten $v \in V$ eine Zahl $f(v) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Zusätzlich sei G' der Graph, der die gleichen Knoten und Kanten wie G enthält und in dem jede Kante $(u, v) \in E$ das Gewicht $w'(u, v) = w(u, v) + f(u) - f(v)$ erhält. Zeigen Sie, dass G und G' die gleichen kürzesten Wege enthalten.

Achtung: Die Distanzen können sich sehr wohl verändern.

Aufgabe 27

Gegeben sei ein gerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E)$ (mit positiven Kantengewichten) und eine Teilmenge von Knoten $U \subseteq V$. Entwickeln Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O((|E| + |V|) \log |V|)$, der für jeden Knoten $v \in V \setminus U$ denjenigen Knoten $u^* \in U$ mit der geringsten Distanz zu v berechnet, d.h., $u^* := \arg \min_{u \in U} \delta(u, v)$.